УДК 531.01

**СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЮ КОЛЕСА**

**А.В.Костарев**

*Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.*

*Санкт – Петербург, Россия*

***Аннотация*** *Рассмотрена общая модель сопротивления движению деформируемого колеса по деформируемой опорной поверхности. Показано, что сопротивление приводится не только к моменту, но и к силе. Установлено, что традиционная модель трения качения описывает только сопротивление качению деформируемого колеса по абсолютно твердой опорной поверхности.*

***Ключевые слова:*** *момент трения качения, сила сопротивления дороги*

 На деформируемое колесо со стороны деформируемой опорной поверхности (дороги) (Рис.1) действуют нормальные и касательные распределенные реакции. Касательные реакции являются силами трения.

Рис.1

А

F

𝛼

F

r

$$∝$$

r

А

k1

k

С

M, ψ

P

Рис.2

N

Fтр

x

𝛼

𝛽

А

 Системы нормальных реакций и сил трения являются плоскими, а значит, имеют равнодействующие *N* и *Fтр* соответственно (Рис.3). Линия действия равнодействующей сил трения *Fтр* проходит несколько ниже линии контакта и наклонена к дороге под малым углом, который при начале движения центра колеса принимает максимальное значение 𝛽.

Ввиду односторонности связи, линия действия нормальной реакции *N* пересекает линию контакта в некоторой точке А, смещенной в сторону, обусловленную действием нагрузки. Линия действия реакции N наклонена против действия нагрузки под малым углом, который при начале движения центра колеса принимает максимальное значение $∝$. Расстояние $k\_{1}=r∝$ назовем *коэффициентом сопротивления дороги.* Ввиду малости углов $∝$ и 𝛽 положим $β = ∝ . $

Линия действия реакции *N* в общем случае смещена относительно центра колеса так, что ее момент препятствует вращению колеса, обусловленному нагрузкой. При начале вращения колеса смещение достигает предельного значения *k,* которое называется *коэффициентом трения качения*.

В осях (х, у) уравнения движения колеса радиуса *r*, массы *m*, и момента инерции *J*  под действием нагрузки на ось ***Р***, силы ***F*** и момента *М* имеют вид:

$$m\ddot{x}=F+F\_{тр}Cosα-NSinα (1)$$

$$ 0=NCosα-P+F\_{тр}Sinα (2) $$

$J\ddot{ψ}=M- rF\_{тр }-Nk$ (3)

Рассмотрим чистое качение колеса:

$\ddot{x}=r\ddot{ψ}$ (4)

Из уравнения (2):

$$N=\frac{\left(P-F\_{тр}Sinα\right) }{Cosα} $$

Из уравнений (1,3,4) находим силу трения $F\_{тр }$ и ускорение $\ddot{x}$

$$F\_{тр}=\frac{Mmr-FJ+P\left(JTgα-\frac{mrk}{Cosα}\right)}{mr\left(r-kTgα\right)+J\left(Cosα+SinαTgα\right)} m\ddot{x}=F+F\_{тр}\left(Cosα+SinαTgα\right)-PTgα $$

Полагая что $α\ll 1$ и

$Cos α ≈1, Sin α ≈ Tg α ≈ α≈\frac{k\_{1}}{r} $(5)

находим:

$$F\_{тр}≈\frac{Mmr-FJ+P(J\frac{k\_{1}}{r}-mrk)}{mr\left(r-\frac{kk\_{1}}{r}\right)+J[1+\left(\frac{k\_{1}}{r}\right)^{2}] } m\ddot{x}=F+F\_{тр}\left[1+\left(\frac{k\_{1}}{r}\right)^{2}\right]-P\frac{k\_{1}}{r} $$

Положив, что $k и k\_{1}$ величины одного порядка малости,

$$k , k\_{1}\ll r$$

введя обозначение

$$ J\_{A}=J+mr^{2}$$

и отбросив малые величины, получим приближенный результат:

$$F\_{тр}≈\frac{1}{rJ\_{A}}\left[Mmr^{2}-FrJ+P(Jk\_{1}-mr^{2}k)\right] \ddot{x}=\frac{r}{J\_{A}}\left[M+Fr-P(k+k\_{1})\right] (6)$$

Составим теперь из (1-4) приближенные уравнения движения колеса, приняв в них (5).

С

P

Рис.3

Fтр

Fс

-P

Mтк

F

x

M, ψ

$$m\ddot{x}=F+F\_{тр}-N\frac{k\_{1}}{r} $$

$$0=N-P+F\_{тр}\frac{k\_{1}}{r} $$

$ J\ddot{ψ}=M-rF\_{тр }-Nk$

Отсюда

$$m\ddot{x} ≈ F+F\_{тр}-F\_{c}$$

$ J\ddot{ψ}≈M-rF\_{тр }-M\_{тk}$ (7)

Где

$M\_{тk}=Nk$$F\_{c}≈P\frac{k\_{1}}{r}$

При чистом качении $\ddot{x}=r\ddot{ψ}$ получаем тот же результат (6), что и из точных уравнений после учета малых. Отсюда следует, что задачи о движении колеса по горизонтальной дороге можно решать на основе приближенных уравнений (7) и Рис.3.

Электронный справочник **DPVA [11]** приводит следующие коэффициенты трения качения в см:

|  |  |
| --- | --- |
| Деревянное колесо по дереву | 0,05-0,08 |
| Стальное колесо по дереву | 0,15-0,25 |
| Деревянное колесо по стали | 0,03-0,04 |

Табл.1

Таблица показывает, что для пары материалов разной твердости, например дерево-сталь, коэффициент сопротивления деформируемой дороги качению твердого колеса значительно превосходит коэффициент трения качения деформируемого колеса по твердой дороге. Это подтверждает различную природу сопротивлений.

 Понять какое именно сопротивление характеризуют момент трения качения *Mтк* и сила сопротивления *Fc* легче, если рассмотреть два предельных случая, когда одно из контактирующих тел является абсолютно твердым.

M

**F**

Р

Рис.4

**Fтр**

С

**- Р**

**Мтк**

***Абсолютно твердая дорога.*** В этом случае коэффициент сопротивления дороги k1 = 0, нормальная реакция *N=Р,* вертикальна и смещена на коэффициент трения качения k . В центре колеса С реакция *N* приводится к силе *–****Р*** и моменту трения качения *Mтк* (Рис.4). Таким образом, коэффициент трения качения k характеризует сопротивление вращению колеса, которое не зависит от движения центра колеса.

 Именно этот случай рассматривается в традиционной модели трения качения [1, с. 78-79], [2, c. 89-90], [3, c. 252-253], [4, c.238], [5, c. 201], [6, c.103], [7, c.185], [8, c.255], [9, c. 98-99], [10], [12, c.121] . К сожалению, в большинстве источников модель снабжена неверным рисунком вида Рис.5

Сочетание Рис.5 с моделью момента трения качения приводит к парадоксам при *малой* силе трения скольжения *Fтр*<<1**.**  Центр *ведущего колеса* (***F*** *= 0*) вынужден двигаться под действием сколь угодно малой силы ***Fтр***, преодолевая сопротивление дороги.

*Ведомое колесо* (*M = 0*) вынужденно вращаться в обратную сторону под действием силы ***N***.

*Свободно* пущенное вдоль абсолютно гладкой дороги колесо (*M, F*, f = 0) не может останавиться, несмотря на сопротивление опорной поверхности.

M

**Fтр**

Рис.5

Р

**F**с

**-Р**

С

**F**

***Абсолютно твердое колесо.*** В этом случае коэффициент трения качения k = 0, реакция ***N*** проходит через центр колеса (Рис.2) и вызывает силу сопротивления ***Fc*** (Рис 5). Таким образом, коэффициент сопротивления дороги k1 характеризует сопротивление поступательному перемещению колеса, которое не зависит от вращения колеса.

 ***Выводы.***

1. Для любой пары материалов существует два коэффициента сопротивления: коэффициент трения качения k, характеризующий момент сопротивления, и коэффициент сопротивления дороги k1 , характеризующий силу сопротивления.
2. Таблицы коэффициентов трения качения следует пересмотреть, экспериментально определив коэффициенты k и k1.
3. В курсах теоретической механики традиционную модель трения качения следует сопровождать рисунком Рис.4 b и дополнить моделью сопротивления дороги.

**Литература**

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.Курс теоретической механики, т.1. $-$М.: Наука, 1982. $-$352с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р*.* Курс теоретической механики. $- $СПб: Лань, 1998. $- $729с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. $- $М.: Высшая школа, 2003, $- $719с.
4. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С*.* $- $М.: МГТУ, 2000. $- $735с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.$-$М.: Высшая школа, 1971.$-$488 с.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. $- $М.: Наука, 1967. $- $478с.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. $- $М.: Высшая школа.1987. $- $344 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2. $- $М.: Наука, 1966. $- $663с.
9. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. I-3// Под ред. Колесникова К.С. 1994. $- $534с.
10. Illinois Institute of Technology Coaching: Rolling Friction.

 URL: <http://www.youtube.com/watch?v=9lO-AIcq0yI> $-$ (дата обращения: 24.12.2009).

1. Электронный справочник **DPVA.**

 **URL:** <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/FrictionOfRolling/> $-$

 (дата обращения: 14.12.2009).

1. Аппель П. Теоретическая механика. Том 2. ̶ М.: Физматлит, 1960. ̶ 487 с.